Varianta 080

Subiectul I

a) 0; b) (2;2); c) $\alpha = 1$; d) -5; e) $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$; f) $\sqrt{3}$.

Subiectul II

1. a) 2; $\frac{1}{4}$; b) $f(x+y) = 2^{x+y}$; $f(x) \cdot f(y) = 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$, deci $f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \forall$ x, y$\in \mathbf{R}$;

c) $f(2x) = 2f(x) \Leftrightarrow 2^{2x} = 2 \cdot 2^x$ cu soluția $x = 1$; d) 1023; e) $\frac{4}{5}$.

2. a) $4x^3 - 4$; b) $f'(1) = 0$; c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f'(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty; 1) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty; 1]$; $f'(x) > 0$ pentru $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[1, +\infty)$; d) $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ pentru orice x număr real, de unde se obține f convexă pe**R**;

e) $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{9}{5}$.

Subiectul III

a) $X \in C(A) \Rightarrow AX = XA \Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{a'-d'}{a-d}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Dacă $b \neq 0, c \neq 0, a \neq d$, din punctul a) şi

$X \in C(A), X = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{a'-d'}{a-d} = \alpha.$. Deci $b' = \alpha b$, $c' = \alpha c$, şi notând

$\beta = d' - \alpha d$, avem $d' = \alpha d + \beta$, $a' = \alpha a + \beta$, deci $X = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d + \beta \end{pmatrix} = \alpha A + \beta I_2$.

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $B \in C(A) \Rightarrow B = \alpha A + \beta I_2, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \Rightarrow AB = BA$, deci $(A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$.

f) Folosind e), avem $\det(A^2+B^2) = \det(A+iB) \cdot \det\left(\overline{A+iB}\right) = \det(A+iB)\overline{\det(A+iB)} = \left|\det(A+iB)\right|^2 \geq 0$.

g) $B = \alpha_1 A + \beta_1 I_2$, $C = \alpha_2 A + \beta_2 I_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow B \cdot C = C \cdot B$ şi din f)$\Rightarrow \det\left(B^2 + C^2\right) \geq 0$.

Subiectul IV

a) *Functia* $f_1 : R^* \to R, f_1(x) = \sin\frac{1}{x}$ este surjectiva, $|f_1(x)| \leq 1, \forall x \in R^*$, *iar* $g_1 : R^* \to R, g_1(x) = x$ are $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. *Deci* $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) g_1(x) = 0$;

b) Fie $a_n = \frac{1}{2n\pi}, b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ si $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -1$,

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{1}{x}$ nu exista, de unde obtinem ca f_a nu are limita in $x = 0$.

c) g este continua pe $(-\infty,0)$ si $(0,+\infty)$, iar folosind a) avem $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$, deci g este continua pe **R**.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, deci h derivabila in $x = 0$ si cum h derivabila pe $\mathbf{R}^*$, avem h derivabila pe **R**.

e) $h'(x) = \left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pentru $x \neq 0$ si $h'(0) = 0$ conform punctului d).

$2g(x) - f_0(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, deci $h'(x) = 2g(x) - f_0(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

f) Demonstram ca f_0 *admite* primitive.Din punctul d) => $f_0(x) = 2g(x) - h'(x), \forall x \in \mathbf{R}$. Functia f este continua, deci admite primitive. Daca G este o primitiva a lui g, atunci $F_0(x) = 2G(x) - h(x)$ *este* o primitiva lui $f_o(x)$.

Demonstram ca daca $a \neq 0$, f_a *nu* admite primitive. Sa presupunem contrariul.

Atunci $(f_a - f_0)(x) = \begin{cases} 0, \textit{daca } x \neq 0 \\ a, \text{daca } x = 0 \end{cases}$

admite primitive, contradictie, deoarece nu are proprietatea lui Darboux.

g) $f_a^2(x) = \begin{cases} \cos^2\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ a^2, x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\cos\frac{2}{x}), x \neq 0 \\ a^2, = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, x \neq 0 \\ a^2, x = 0 \end{cases} - \frac{1}{2}\begin{cases} \cos\frac{2}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

.

Prin analogie cu punctele precedente rezulta ca

f_a^2 admite primitive daca si numai daca $a^2 = \frac{1}{2} \iff a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.